Bull. Kagoshima Pref. Jr. College, 36, 17～28 (1985)

『パーソナル・コンピューターによる逆行列の簡易計算法』

中　西　　　貢

1．はじめに

経済学上の分析において，統計資料の利用は欠かすことができないが，それらの統計は独自の様々な仮定および分類基準に基づいて作成されており，経済理論の実証においてはその経済理論のもつ諸仮定などとの不一致・非整合性などをともなうことが多い。こうしたことから，統計の「組み替え」の必要性が生じてくる。

ここでは，こうした問題意識から生じた産業連関表の組み替えをパーソナル・コンピューターの利用という視点，すなわち演算速度および記憶領域の制限下における数値計算法という視点から考察してみたいと思う。

2．逆行列の一般的計算法

連立方程式の解法は古くから研究されており，理論的にはクラメールの公式によって，その解決はなされている。しかし，この公式を用いて行列式を直接計算することは，大型の計算機ならともかく，パーソナル・コンピューターでは時間があまりにもかかりすぎ10元程度の方程式でもほとんど不可能に近く，少なくとも実用的ともいえないであろう。

その他の方法としては，消去法と反復法とに大別できる。

(1) 消去法

消去法とは，与えられた方程式に一次変換を繰り返して，未知数を消去していく方法である。

連立方程式

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots\cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots\cdots + a_{2n}x_n = b \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots\cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{array}\right\} \quad (1)$$

は，まとめて

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k = b_i \quad (i = 1, \cdots\cdots, n) \qquad (2)$$

あるいは，行列記法で示すと，

$A = (a_{ik})$，$x = (x_k)$（縦ベクトル），$b = (b_k)$（縦ベクトル）

$$Ax=b \tag{3}$$

と書ける。これに行列 B にかけて，

$$BAx=Bb \tag{4}$$

とする。この B は，i，j を固定して，対角線は 1，他は第 i 行第 j 列（$i \neq j$）に（$-c$）があるほかは，すべて 0 である行列をとったとすると，BA は第 i 行以外はもとの A の行のままで，第 i 行の成分が，

$$(a_{i1}-ca_{j1},\ a_{i2}-ca_{j2},\ \cdot\cdot\cdot\cdot,\ a_{in}-ca_{jn})$$

となり，右辺の b も b_i が b_i-cb_i に変換される。また B として対角線上 i 番目にのみ c，他に 1，対角線以外は 0 とすれば，i 行目がすべて c 倍される。したがって，もし $a_{ii} \neq 0$ ならばまず i 行目に $1/a_{ii}$ をかけ，次に順次この行に a_{ji}（$j=1\cdot\cdot\cdot n\,;\,i\neq j$）をかけては第 j 行から引くという変換を行うと，

$$A'x=b',\ A'=(a'_{jk}),\ b'=(b'_j) \tag{5}$$

$$a'_{jk}=a_{jk}-a_{ji}a_{ik}/a_{ii} \quad (j,\ k \neq i)$$

$$a'_{ik}=a_{ik}/a_{ii} \quad (k \neq i) : a'_{ji}=0(j \neq i)$$

$$b'_j=b_j-a_{ji}b_i/a_{ii} \quad (j \neq i) : b'_i=b_i/a_{ii}$$

となる。すなわち変数 x_i は i 番目の方程式以外からは消去されてしまう。この操作を繰り返し行うことによって連立方程式を解くことができる。しかし，この方法では n^2+n 個の記憶場所がいり，記憶容量の小さいコンピューターでは場合によってはプログラムを実行させれない場合が生じてくる[1)]。

普通の消去法では，記憶に多くの場所が必要とされるため，これを節約する方法としてクラウト法がある。　クラウト法では，係数の行列を左下半が 0 の三角行列に変換する方法である。あるいは A を左下半で 0 で対角線要素が 1 の三角行列 K と，右下半が 0 の三角行列 L との積に分解するといってもよい。

$$Ax=b,\ A=(a_{ik}),\ x=(x_k),\ b=(b_i) \tag{3}$$

において，$b_i=a_{i\,n+1}$ とし，A の右側に b を縦に並べた n 行（n＋1）列を A_1 としておき，また

$$L=\begin{pmatrix} t_{11} & \cdots\cdots\cdots & 0 \\ t_{21}\ t_{22} & \cdots\cdots & 0 \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ t_{n1} & \cdots\cdots\cdots & t_{nn} \end{pmatrix} \qquad K_1=\begin{pmatrix} 1 & t_{12} \cdots\cdots & t_{1n}t_{1\,n+1} \\ 0 & 1\quad t_{23} & \cdots\cdots\cdots \\ & \cdots\cdots\cdots 1 & \cdots\cdots\cdots \\ 0 & \cdots\cdots\cdots\cdots 1 & t_{1\,n+1} \end{pmatrix}$$

K_1 の最右側の列を t とし，これを除いた正方行列を K とする。

$$A_1=LK_1$$

とすれば，最も右側の一列を別に書くと，

$$A=LK \qquad b=Lt \tag{6}$$

L の対角線要素がすべて 0 でなければ，L の行列式は 0 ではないから，(6)は $Kx=t$ と同値である。これが求まれば，K の一番下の行から x_n がわかり，それを一つ上に入れて x_{n-1} がわかり，順次

上の式へ代入して x_1 までが求まる。

(6)を成分表示すれば，t_{jk} はつぎのように求めればよい。

$t_{ji} = a_{ji}(j = 1 \cdots\cdots n) \qquad t_{ik} = a_{ik}/a_{11}(k = 2\cdots\cdots n + 1)$

$1 < k \leqq j$ のとき　$t_{jk} = a_{jk} - t_{j1}t_{1k} - t_{j2}t_{2k} - \cdots\cdots - t_{jk-1}t_{k-1k}$

$1 < j < k$ のとき　$t_{jk} = (a_{jk} - t_{j1}t_{jk} - \cdots\cdots - t_{jj-1}t_{j-1k})/t_{jj}$

となる。したがって，t_{jk} を求めるにあたって a_{jk} より順次引き算を行っていけばよいわけで大幅に記憶容量が節約できるわけである。

(2) 反　復　法

連立方程式(3)の行列が対角線行列に近ければ，反復法を用いて解くことができる。産業連関表の逆行列を求める場合，この可能性は高いといえる。

第 i 行を a_{ii} で割って対角線要素を 1 とし，

$A=E+B$　（E：単位行列）

としたとき，

$\sum_{j=1}^{n} | a_{ij} | < 1 \qquad (i \neq j)$ ならば，

$E-B+B^2-B^3+B^4\cdot\cdot\cdot$

は収束して，その極限は A^{-1} である。したがって，$x=A^{-1}b$ は，

$b-Bb+B^2b-B^3b+B^4b\cdot\cdot\cdot$

の極限として求められ，$B^m b$ でまとまった部分和を x_{m+1} とすると，$x_1=b$，$x_0=0$ とおけば，x_m は $x=0$ から始めて帰納的に，

$x_{m+1}=b-Bx_m=b+x_m-Ax_m$

$x_i^{(0)}=0 \qquad x_i^{(m+1)}=(b_i-\Sigma a_{ij}x_j^{(m)})/a_{ii}$

で定められる。この方式は収束速度が遅いということから，一般的には反復法の応用であるガウス—ザイデル法が用いられるのであるが，産業連関分析とのかかわりでいうならば，最終需要の波及効果を漸次的にあるいは波及の中断を想定した場合の連関効果を表現することができるという点に大きな意味があるであろう。

反復法の応用として，ヤコビ法，加速法（SOR 法），ガウス—ザイデル法などがある。上述した単純な反復法の場合には，$x_1^{(m)}\cdot\cdot\cdot X_n^{(m)}$ を全部求めてから，次の $x_1^{(m+1)}\cdot\cdot\cdot x_n^{(m+1)}$ に進むわけであるが，ガウス—ザイデル法の場合には $x_1^{(m+1)}$ がでたら，$x_1^{(m)}$ をすぐにそれをおきかえ，次の $x_2^{(m+1)}$ には $x_1^{(m+1)}$，$x_3^{(m)}\cdot\cdot\cdot$，$x_n^{(m)}$ を使って求める方法である。すなわち，

$x_i^{(m+1)}=(b_i-\Sigma a_{ik}x_k^{(m+1)}-\Sigma a_{ij}x_j^{(m)})/a_{ii}$

とするわけである。

この方法の評価について，「産業連関表は，産業をうまく配列すると A 行列の上三角形部分がほとんどがゼロ要素ばかりをもつように変形することができ，・・・・・大規模産業連関モデルの解

法には，・・・Gause−Seidel 法のほうが適していることが推察できる」[2] との指摘がある。この点に関していうと，確かに小分類に基づく産業連関表（その意味では大規模産業連関モデル）の場合には，引用したような配列は可能であるが，60分類程度の中分類においては，0ではなくきわめて小さな値となることがあり，丸め誤差の影響から収束が遅くなることすらある。

パーソナル・コンピューターの利用という視点からすれば，ガウス—ザイデル法の場合得られた反復解を次々に利用していくことから，記憶容量の設定が小さくてすみ，またプログラムを簡単であるという点にこそ利点が求められると思う。

3．逆行列の組み替え

(1) 部分行列の消去

投下労働量の計算を行うような場合，生産的労働の概念の定義などから，特定の投入係数行列を消去する必要が生じる場合がある。このような場合，もとの投入係数行列のレオンティエフの逆行列が既知場合についての組み替えられた逆行列の計算方法について述べてみたい。

投入係数行列を A，逆行列係数を $(I-A)^{-1}$ とし，残すべき係数行列を P，それ以外 Q，R，S で表示し，それに対応する $(I-A)^{-1}$ の部分行列を B，X，Y，Z で表示すると，

$$(I-A) = \begin{pmatrix} P & Q \\ R & S \end{pmatrix} \qquad (I-A)^{-1} = \begin{pmatrix} B & Y \\ Z & X \end{pmatrix}$$

となる。そして，いま P^{-1} を求めると，

$$\begin{pmatrix} P & Q \\ R & S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B & Y \\ Z & X \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & O \\ O & I \end{pmatrix} \tag{1}$$

(1)より，

$$PB+QZ=I \tag{2}$$

$$PY+QX=O \tag{3}$$

$$RB+SZ=O \tag{4}$$

$$RY+SX=I \tag{5}$$

(2)より

$$B+P^{-1}QZ=P^{-1} \tag{6}$$

(3)より

$$Q=-PYX^{-1} \tag{7}$$

(7)式を(6)式に代入すると

$$B-P^{-1}\ (PYX^{-1})\ Z=P^{-1}$$

$$P^{-1}=B-YX^{-1}Z \tag{8}$$

となる。したがって，

$$(I-A)^{-1} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \cdots\cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} \cdots\cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & b_{n2} & b_{nn} \end{pmatrix}$$

とし，k 行列を消去した場合の逆行列係数を b'_{ij} とすると，

$$b'_{ij} = b_{ij} - \frac{\Sigma\, b_{ik} b_{kj}}{b_{kk}} \tag{9}$$

となる。このように，逆行列が既知であり，特定行列を消去する場合には，改めて逆行列を計算する必要はなく，(9)式のように簡単に求めることができる。なお，消去すべき行列が２つ以上の場合には，この計算を単に繰り返せばよい。

(2) 部分行列の変更

特定の部門をアグリゲーションするような場合，部門数が減ると同時にその部門の投入係数が変化することになる。このようなときは，まず前節で述べた方法によってアグリゲーションを行う部門の一方を消去し，さらにここで述べる方法によって修正された投入係数をもとに逆行列をもとめればよい。

もとの行列（I－A）の要素を a_{ij}，これに対する $(I-A)^{-1}$ の要素を b_{ij} とし，いい（I－A）行列の k 列の要素が a_{ik} から a'_{jk} によっておきかえられた行列を（I－A'）これに対する逆行列を $(I-A')^{-1}$ の要素を b'_{ij} とすると，

$$(I-A) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots\cdots & a_{1k} \cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots\cdots & a_{2k} \cdots\cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} \cdots\cdots & a_{kk} \cdots\cdots & a_{kn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots\cdots & a_{nk} \cdots\cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \tag{10}$$

$$(I-A)^{-1} = \begin{pmatrix} b & b_{12} \cdots\cdots & b_{1k} \cdots\cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} \cdots\cdots & b_{2k} \cdots\cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{k1} & b_{k2} \cdots\cdots & b_{kk} \cdots\cdots & b_{kn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & b_{n2} \cdots\cdots & b_{nk} \cdots\cdots & b_{nn} \end{pmatrix} \tag{11}$$

$$(I - A') = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & & a'_{1k} & & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots\cdots & a'_{2k} & \cdots\cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a'_{k1} & a'_{k2} & & a'_{kk} & & a'_{kn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a'n_{1} & a'_{n2} & & a'_{nk} & & a'_{nn} \end{pmatrix} \tag{12}$$

$$(I - A')^{-1} = \begin{pmatrix} b'_{11} & b'_{12} & \cdots\cdots & b'_{1k} & \cdots\cdots & b'_{1n} \\ b'_{21} & b'_{22} & \cdots\cdots & b'_{2k} & \cdots\cdots & b'_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b'_{k1} & b'_{k2} & \cdots\cdots & b'_{kk} & \cdots\cdots & b'_{kn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b'_{n1} & b'_{n2} & \cdots\cdots & b'_{nk} & \cdots\cdots & b'_{nn} \end{pmatrix} \tag{13}$$

とし，$c_j = \Sigma b_{ir} a'_{rk}$ とすると，

$$b_{ij} / c_k = b'_{ik} \tag{14}$$

$$b_{ij} - b'_{kj} c_i = b'_{ij} \qquad (i \neq j) \tag{15}$$

となる。⑿，⒀式とり求められたクロネッカーのデルタを δ'_{ij} とすると，

$$\delta'_{kk} = \sum_{r=1}^{n} b'_{kr} a'_{rk} = \Sigma \left(\frac{b_{kr}}{\Sigma b_{kr} a_{rk}} \right) = \frac{\Sigma b_{kr} a'_{kr}}{\Sigma b_{kr} a'_{kr}} = 1$$

また，

$$\delta'_{ik} = \sum_{r=1}^{n} b'_{ir} a'_{rk} = \Sigma \left(b_{ir} - \frac{b_{kr} \, \Sigma \, b_{ir} a'_{rk}}{\Sigma \, b_{kr} a'_{rk}} \right) a'_{rk}$$

$$= \Sigma b_{ir} a'_{rk} - \frac{\Sigma \, b_{kr} a'_{rk} \, \Sigma \, b_{ir} a'_{rk}}{\Sigma \, b_{kr} a'_{rk}} = \Sigma \, b_{ir} a'_{rk} - \Sigma \, b_{ir} a'_{rk} = 0$$

$$\delta'_{kj} = \Sigma \, b'_{kr} a'_{rj}$$

$$= \Sigma \left(\frac{b_{kr}}{\Sigma \, b_{kr} a'_{rk}} \right) a_{rj} = \frac{\Sigma \, b_{kr} a_{rj}}{\Sigma \, b_{kr} a'_{rk}} = 0$$

$$\delta'_{ij} = \Sigma \, b'_{ir} a_{rj} = \Sigma \left(b_{ir} - \frac{b_{kr} \, \Sigma \, b_{ir} a_{rk}}{\Sigma \, b_{kr} a'_{rk}} \right) a_{rj}$$

$$= \Sigma \, b_{ir} a_{rj} - \frac{\Sigma \, b_{kr} a_{rj} \, \Sigma \, b_{rj} a'_{rk}}{\Sigma \, b_{kr} a'_{rk}} = \Sigma \, b_{ir} a_{rj}$$

で，$\Sigma b_{ir} a_{rj}$ は，$i=j$ のとき1，$i \neq j$ のとき0となる。

以上のことより，⒁，⒂式より逆行列を求めることができる。

さらに，

$$(I - A'') = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & a'_{1k} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots\cdots & a'_{2k} & \cdots\cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a'_{k1} & a'_{k2} & \cdots\cdots & a'_{kk} & \cdots\cdots & a'_{kn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots\cdots & a'_{nk} & \cdots\cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$(I - A'')^{-1} = \begin{pmatrix} b'_{11} & b'_{12} & \cdots\cdots & b'_{1k} & \cdots\cdots & b'_{1n} \\ b'_{21} & b'_{22} & \cdots\cdots & b'_{2k} & \cdots\cdots & b'_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b'_{k1} & b'_{k2} & \cdots\cdots & b'_{kk} & \cdots\cdots & b'_{kn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b'_{n1} & b'_{n2} & \cdots\cdots & b'_{nk} & \cdots\cdots & b'_{nn} \end{pmatrix}$$

の場合には，転置行列の逆行列は逆行列の配置行列であるから，⒁，⒂式を使い k 列を変更したうえで，行と列を転置し，同じ操作を繰り返せばよい。

(3) 部分行列の追加

特定部門をディスアグリゲーション，または外生化されている部門を内生化するような場合，部分行列を元の行列に対して付加する必要がある。

$$(I - A) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots\cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots\cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad (I - A)^{-1} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots\cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots\cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & b_{nk} & \cdots\cdots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

を既知とし，これに対し，

$$(I - A'') = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1n} & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots\cdots & a_{2n} & a_{2k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots\cdots & a_{nn} & a_{nk} \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots\cdots & a_{kn} & a_{kk} \end{pmatrix}$$

$$
(I - A'')^{-1} = \begin{pmatrix} b'_{11} & b'_{12} & \cdots\cdots & b'_{1n} & b'_{1k} \\ b'_{21} & b'_{22} & \cdots\cdots & b_{2n} & b'_{2k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b'_{n1} & b'_{n2} & \cdots\cdots & b'_{nn} & b'_{nk} \\ b'_{k1} & b'_{k2} & \cdots\cdots & b'_{kn} & b'_{kk} \end{pmatrix}
$$

を求めるには，

$$
(I - A^{*}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1n} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots\cdots & a_{2n} & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots\cdots & a_{nn} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots\cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

$$
(I - A^{*})^{-1} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots\cdots & b_{1n} & 0 \\ b_{21} & b_{22} & \cdots\cdots & b_{2n} & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots\cdots & b_{nn} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots\cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

に対し，前節でとりあげた修正をおこなえばよい。したがって，

$$
(I - A') = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1n} & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots\cdots & a_{2n} & a_{2k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots\cdots & a_{nn} & a_{nk} \\ 0 & 0 & \cdots\cdots & 0 & a_{kk} \end{pmatrix}
$$

$$
(I - A')^{-1} = \begin{pmatrix} b'_{11} & b'_{12} & \cdots\cdots & b'_{1n} & b'_{1k} \\ b'_{21} & b'_{22} & \cdots\cdots & b'_{2n} & b'_{2k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b'_{n1} & b'_{n2} & \cdots\cdots & b'_{nn} & b'_{nk} \\ b'_{k1} & b'_{k2} & \cdots\cdots & b'_{kn} & b'_{kk} \end{pmatrix}
$$

とすると，

$$c_i = \Sigma\, b_{ir}a_{rk}$$

$$b'_{kj} = b_{ij}/c_k = b_{ij}$$

$$b'_{ij} = b_{ij} - b'_{ki}c_i = b_{ij}$$

$$b'_{kk} = b_{kk}/c_k = 1/c_k - 1/a_{kk}$$

$$b'_{ik} = b_{ik} - b'_{kk}c_i = 0 - c_i/a_{kk} = -c_i/a_{kk}$$

となる。すなわち，

$$(I - A')^{-1} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \cdots\cdots & b_{1n} & b'_{1k} \\ b_{21} & b_{22} \cdots\cdots & b_{2n} & b'_{2k} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots \\ b_{n1} & b_{n2} \cdots\cdots & b_{nn} & b'_{nk} \\ 0 & 0 \cdots\cdots & 0 & b'_{kk} \end{pmatrix}$$

となり，次に

$$(I - A'') = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots\cdots & a_{1n} & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} \cdots\cdots & a_{2n} & a_{2k} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots\cdots & a_{nn} & a_{nk} \\ a_{k1} & a_{k2} \cdots\cdots & a_{kn} & a_{kk} \end{pmatrix}$$

$$(I - A'')^{-1} = \begin{pmatrix} b''_{11} & b''_{12} \cdots\cdots & b''_{1n} & b''_{1k} \\ b''_{21} & b''_{22} \cdots\cdots & b''_{2n} & b''_{2k} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots \\ b''_{n1} & b''_{n2} \cdots\cdots & b''_{nn} & b''_{nk} \\ b''_{k1} & b''_{k2} \cdots\cdots & b''_{kn} & b''_{kk} \end{pmatrix}$$

とすると，

$$c_i = \Sigma\, a_{kr} b'_{rj}$$

$$b''_{ik} = b'_{ik}/c_k$$

$$b''_{ij} = b'_{ij} - b''_{ik}c_j \qquad (i \neq k)$$

となる。

4. ま と め

以上見てきたように，逆行列の既知である場合，特定の行列の組み替えを行うときには逆行列そのものを再計算することなく，簡易な代数計算によって求めることができる。産業連関表においては，基本表の磁気テープおよび大型の計算機があれば，どのような組み替えも可能であるが，そのようなツールに制限がある場合，中分類についての逆行列係数（複数）が公表されていることから，それをもとにここで示した方法によって組み替えることはきわめて有効であると思う。

最後に，ここで示した方法の BASIC プログラムを記しておく。

〔注〕

1）60×60部門程度で，例えばPC—88なら，ぎりぎりの水準である。

2）〔8〕pp 167—168

〔参考文献〕

〔1〕　森口繁一・高田勝　『数値計算法』　岩波講座現代応用数学　1958

〔2〕　一松信　『数値計算』　至文堂近代数学新書　1963

〔3〕　A. D. ブース　『数値計算法』（宇田川・中村訳）1958

〔4〕　古屋茂　『行列と行列式』　1957

〔5〕　竹内啓　『線型数学　補訂版』　1974

〔6〕　平田光穂・須田精二郎・竹本宣弘　『パソコンによる数値計算』　1982

〔7〕　青木由直　『BASIC 数値計算法』　1984

〔8〕　久保庭真彰編　『マイコンによる経済学』　1984

〔9〕　通商産業大臣官房調査統計部編　『日本経済の産業連関分析』　1956

プログラム

```
100 REM ＊＊＊ PR.1 ギョウレツノショウキョ＊＊＊
110 N =( )
120 DIM B(N,N)
130 OPEN "IOIV" FOR INPUT AS ＃ 1
140 I = 1 : J = 0
150 ＊ LOOP
160 IF J = N THEN J = 0 : I = I + 1
170 INPUT ＃ 1, X
180 B(I, J) = X
190 IF EOF(1) THEN ＊ EXIT
200 GOTO ＊ LOOP
210 ＊ EXIT
220 CLOSE ＃ 1
230 INPUT "ショウキョギョウレツスウ", K
240 OPEN "IOIVR" FOR OUTPUT AS ＃1
250 FOR I = 1 TO N
260 FOR J = 1 TO N
270 S = 0
280 FOR K = 1 TO N
290 S = S + B(I,K) ＊ B(K, J)
300 NEXT K
310 B2 = B(I, J) − S/B(K,K)
320 WRITE ＃ 1, B2
330 NEXT J
340 NEXT I
350 CLOSE ＃ 1
360 END
```

```
100 REN ＊＊＊ PR.2 ギョウレツシュウセイ＊＊＊
110 N = ( )
120 DIM A(N,N), B(N,N), C(N)
130 OPEN "IOMA" FOR INPUT AS ＃ 1
140 I = 1 : J = 0
150 ＊ LOOPA
160 IF J = N THEN J = 0 : I = I + 1
170 INPUT ＃ 1, X
180 A(I, J) − X
190 IF EOF(1) THEN ＊ EXITA
200 GOTO ＊LOOPA
210 ＊ EXITA
220 OPEN "IOIV" FOR INPUT AS ＃ 1
230 I = 1 : J = 0
240 ＊ LOOPB
250 IF J = N THEN J = 0 : I = I + 1
260 INPUT ＃ 1, X
270 B(I, J) = X
```

```
280 IF EOF(1) THEN ＊ EXITB
290 GOTO ＊ LOOPB
300 ＊ EXITB
310 CLOSE ＃ 1
320 INPUT "シュウセイギョウレツスウ", K
330 INPUT "1. ギョウ 2. レツ ", OP
340 OPEN "IOIVS" FOR OUTPUT AS ＃ 1
350 ON OP GOTO ＊ TA, ＊ YO
360 ＊ TA
370 FOR I = 1 TO N
380 INPUT X
390 A(R,K) = X
400 FOR I = 1 TO N
410 C(I) = 0
420 FOR R = 1 TO N
430 C(I) = C(I) + B(I,R) ＊A(R,K)
440 NEXT R
450 NEXT I
460 FOR J = 1 TO N
470 B(K, J) = B(K, J)/C(K)
480 NEXT J
490 I = 0
500 ＊ LOOP2
510 I = I + 1
520 IF I = K THEN ＊LOOP2
530 IF I > N THEN ＊EXIT
540 FOR J = 1 TO N
550 B(I, J) = B(I, J) − B(K, J) ＊C(I)
560 NEXT J
570 GOTO ＊ LOOP2
580 ＊ YO
590 FOR J = 1 TO N
600 INPUT X
610 A(K,R) = X
620 FOR I = 1 TO N
630 C(J) = 0
640 FOR R = 1 TO N
650 C(J) = C(J) + B(R, J) ＊ A(K,R)
660 NEXT R
670 NEXT I
680 FOR I = 1 TO N
690 B(I,K) = B(I,K)/C(K)
700 NEXT I
710 J = 0
720 ＊ LOOP3
730 J = J + 1
740 IF J = K THEN ＊ LOOP3
750 IF J > N THEN ＊ EXIT
760 FOR I = 1 TO N
770 B(I, J) = B(I, J) − B(I,K) ＊C(J)
780 NEXT I
790 GOTO ＊ LOOP3
800 ＊EXIT
810 FOR I = 1 TO N
820 FOR J = 1 TO N
830 INPUT ＃ 1,B(I, J)
840 NEXT J
850 NEXT I
860 CLOSE ＃ 1
870 END
```

```
100 REM ＊＊＊PR.3 ギョウレツツノツイカ＊＊＊
110 N = ( ) : K = N + 1
120 DIM A(N + 1,N + 1), B(N + 1,N + 1), C(N + 1)
130 OPEN "IOMA" FOR INPUT AS ＃ 1
140 I = 1 : J − 0
150 ＊ LOOPA
160 IF J = N THEN J = 0 : I = I + 1
170 INPUT ＃ 1,X
180 A(I, J) = X
190 IF EOF(1) THEN ＊EXITA
200 GOTO ＊LOOPA
210 ＊EXITA
220 CLOSE ＃ 1
230 OPEN "IOIV" FOR INPUT AS ＃ 1
240 I = 1 : J = 0
250 ＊ LOOPB
260 IF J = N THEN J = 0 : I = I + 1
270 INPUT ＃ 1, X
280 B(I, J) = X
290 IF EOF(1) THEN ＊EXITB
300 GOTO ＊LOOPB
310 ＊ EXITB
320 CLOSE ＃ 1
330 OPEN "IOIVS" FOR OUTPUT AS ＃ 1
340 FOR L = 1 TO N
350 C(L) = 0
360 FOR R = 1 TO N
```

```
370 C(I) = C(I) + B(I,R) *B(R,K)
380  NEXT R
390  B(K,K) = 1/A(K,K)
400 FOR I = 1 TO N
410 B(I,K) =- C(I)/A(K,K)
420  NEXT I
430  FOR J = 1 TO N
440  C(J) = C(J) + A(K,R) * B(R, J)
450  NEXT J
460  FOR I = 1 TO N
470  B(I,K) = B(I, J)/C(K)
480  NEXT I
490  FOR I = 1 TO N
500  FOR J = 1 TO N
510  B(I, J) = B(I, J) - B(I,K) *C(J)
520  NEXT J
530  NEXT I
540  NEXT L
550  FOR I = 1 TO K
560  FOR J = 1 TO K
570  WRITE # 1, B(I, J)
580  NEXT I
590  CLOSE # 1
600  END
```

（昭和60年９月２日受理）