

ような仮値 $\lambda = \lambda_0$ を代入すれば，それに応ずる $\alpha = \alpha_1$ を求めることが出来る。この $\alpha = \alpha_1$ を後のの方の方程式に代入すると，その方程式は λ についての 7 次方程式になる。この方程式は Horner 法や Newton 法によつて解くことが出来るので $\alpha = \alpha_1$ に対する $\lambda = \lambda_1$ を求めることが出来る。更に，この $\lambda = \lambda_1$ を最初の方程式に代入し $\alpha = \alpha_2$ を求める。このような繰返しの手続によつて α 及 λ の直接的一般的最尤推定値を求めることが出来る。

References

- | | | | |
|---------------------------|---|--|------|
| H.Cramér | ; | Mathematical Method of Statistics | 1946 |
| S.S.Wilks | ; | Mathematical Statistics | 1944 |
| F.N.David | ; | Probability Theory for Statistical Methods | 1951 |
| w.E.Deming | ; | Statistical Adjustment of Data | 1946 |
| 宮 沢 光 一 | ; | 近代数理統計学通論 | |
| 北 川 敏 男 | ; | 数理統計学 | |
| 日本応用力学会編 | ; | 応用統計学 | |
| L.R.Klein | ; | A Textbook of Econometrics | 1953 |
| G.Tintner | ; | Econometrics | 1952 |
| H.Wold | ; | Demand Analysis | 1953 |
| T.C.Koopmans | ; | Statistical Inference in Dynamic Economic Models | 1950 |
| W.C.Hood and T.C.Koopmans | ; | Studies in Econometric Method | 1953 |
| 森 田 優 三 | ; | 経済変動の統計分析法 | |
| Econometrica | | Vol26, No.4 | |

$$-\frac{1}{1+\lambda^2} y_{t-1} = -\frac{\alpha \lambda}{1+\lambda^2} x_{t-1} - \frac{\lambda^2}{1+\lambda^2} y_{t-2} - \frac{\lambda}{1+\lambda^2} U_{t-1}$$

であるから両式より

$$y_t - \alpha x_t - \frac{\alpha \lambda}{1+\lambda^2} x_{t-1} - \left(\lambda - \frac{\lambda}{1+\lambda^2} \right) y_{t-1} - \frac{\lambda^2}{1+\lambda^2} y_{t-2} = \varepsilon_t$$

となる，ここで x_t は ε_t と独立な独立変数であり， y_{t-1} 及 y_{t-2} は既決変数で ε_t と独立である。

ところで， ε_t ($t = 1, 2, \dots, T$) に於てその尤度函数は $E(\varepsilon_t \varepsilon_{t-i}) = 0$ ($i \geq 1$) であることから

$$e^L = P(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_t) = \prod_{t=1}^t P(\varepsilon_t)$$

となる。ここで u_t は正規分布をするから U_t の分布も正規分布であり，従つて， ε_t も正規分布をするから，先の尤度函数の対数を取つたものは

$$L = -T(\log \sqrt{2\pi} + \log \sigma(\varepsilon)) - \frac{1}{2\sigma^2(\varepsilon)} \sum_{t=1}^t \varepsilon_t^2$$

となる。

α 及 λ について尤度函数 L を最大化することとは

$$S = \sum_{t=1}^t \left(y_t - \alpha x_t - \frac{\alpha \lambda}{1+\lambda^2} x_{t-1} - \frac{\lambda^3}{1+\lambda^2} y_{t-1} - \frac{\lambda^2}{1+\lambda^2} y_{t-2} \right)^2$$

を α 及 λ について最小化することに等しく，従つて最尤推定値を最小自乗法によつて求めることが出来る。最小化条件は

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial \alpha} &= \alpha \left\{ \sum x^2 + 2 \frac{\lambda}{1+\lambda^2} \sum x_t x_{t-1} + \left(\frac{\lambda}{1+\lambda^2} \right)^2 \sum x_{t-1}^2 \right\} + \\ &\quad \left(\frac{\lambda^2}{1+\lambda^2} \right)^2 \sum x_{t-1} y_{t-1} + \lambda \left(\frac{\lambda}{1+\lambda^2} \right)^2 \sum x_{t-1} y_{t-2} + \left(\frac{\lambda^2}{1+\lambda^2} \right) \\ &\quad \left(\sum x_t y_{t-1} + \sum x_t y_{t-2} \right) - \frac{\lambda}{1+\lambda^2} \sum x_{t-1} y_t - \sum x_t y_t = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial \lambda} &= (\sum y^2_{t-1}) \lambda^7 - (\alpha \sum x_t y_{t-1} - \sum y_t y_{t-1} - \sum y_{t-1} y_{t-2}) \lambda^6 \\ &\quad + (4 \sum y^2_{t-1}) \lambda^5 - (\alpha^2 \sum x_t x_{t-1} - 2\alpha \sum x_t y_{t-1} - \alpha \sum x_{t-1} y_t + \alpha \sum x_{t-1} y_{t-2} \\ &\quad - 5 \sum y_{t-1} y_{t-2}) \lambda^4 + (4\alpha \sum x_t y_{t-1} + 2\alpha \sum x_t y_{t-2} - \alpha^2 \sum x^2_{t-1} \\ &\quad + 4\alpha \sum x_{t-1} y_{t-1} - 4 \sum y_t y_{t-1} - 2 \sum y_t y_{t-2} + 2 \sum y^2_{t-2}) \lambda^3 + (4 \sum x_t y_{t-1} \\ &\quad + 3\alpha \sum x_{t-1} y_{t-2} - 3 \sum y_t y_{t-1}) \lambda^2 + (2\alpha \sum x_t y_{t-2} + \alpha^2 \sum x^2_{t-1} - 2 \sum y_t y_{t-2}) \lambda \\ &\quad + \alpha^2 \sum x_t x_{t-1} - \alpha \sum x_{t-1} y_t = 0 \end{aligned}$$

最初の方程式は α についての一次方程式であるから，この方程式の λ に $1 > \lambda \geq 0$ である

以上のような種々の理由から直接的な尤推定法を求める一つの手段として次の様な方法が考えられる。

u_t は正規分布をし、 $E(u_t) = 0$; $E(u_t^2) = \sigma^2$; $E(u_t u_{t-i}) = 0 (i \geq 1)$ という仮定の下で

$$y_t = \alpha x_t + \lambda y_{t-1} + u_t - \lambda u_{t-1}$$

の Parameter α 及 λ を推定値を求めることが現下の目的である。

先づ、

$$U_t = u_t - \lambda u_{t-1}$$

と置換する。すると先の仮定から次の関係が得られる。

$$E(U_t) = 0 ; E(U_t^2) = (1 + \lambda^2) \sigma^2 ; E(U_t U_{t-1}) = -\lambda \sigma^2$$

$$E(U_t U_{t-i}) = 0 \quad (i \geq 2)$$

従つて、 U_t は一次の自己回帰関係が存在するからこれを

$$U_t = \beta U_{t-1} + \epsilon_t$$

とすることが出来る。ここで ϵ_t は

$$E(\epsilon_t) = 0 ; E(\epsilon_t^2) = \sigma^2 (\epsilon) ; E(\epsilon_t \epsilon_{t-i}) = 0 \quad (i \geq 1)$$

$$E(\epsilon_t U_{t-1}) = 0 \quad (i \geq 1)$$

であるような確率変数とする。

すると、

$$E(U_t U_{t-1}) = \beta E(U_t^2)$$

$$\text{先の } E(U_t^2) = (1 + \lambda^2) \sigma^2 ; E(U_t U_{t-1}) = -\lambda^2 \sigma^2$$

から

$$\beta = -\frac{\lambda}{1 + \lambda^2}$$

を得る。

従つて、先の一次自己回帰関係は次のように書ける。

$$U_t = -\frac{\lambda}{1 + \lambda^2} U_{t-1} + \epsilon_t$$

さて、

$$y_t = \alpha x_t + \lambda y_{t-1} + U_t$$

一時点ずらし、その両辺に $-\frac{\lambda}{1 + \lambda^2}$ を掛けると

とし、このSを

$$\eta_t = \alpha x_t + \lambda \eta_{t-1} \quad (t = 1, 2, \dots, T)$$

の制約の下で最小化する α 及 λ の推定値を求める方法を「完全」最尤推定法と呼び、これに対して、この制約なしでSを最小化する α 及 λ を求める方法を「情報制限」最尤推定法と呼んでいる。

ところで、 η_{t-1} は α 、 λ 及 $(x_0, \dots, x_{-\infty})$ を含んでいる点は η_0 に似ているが、 η_{t-1} は更に η_0 には含まれていず、そして、 $t = 1, 2, \dots, T$ に関する (x_{t-1}, \dots, x_1) をも含んでいて t と共に変動する点が異つている。Kleinはその「情報制限」最尤推定法に於てはこのような性質を持つた η_{t-1} を単一方程式に於てそのParameterを推定する際の常数項のように取扱つている。

従つて、

$$(15) \quad \lambda (\eta_t - \alpha x_t - \lambda \eta_{t-1}) = -u_{t-1} - \lambda u_t$$

が最小化条件の一つとして導かれることになり、このことがKleinをして「情報制限」最尤推定法に於ては各時点で制約

$$(16) \quad \eta_t = \alpha x_t + \lambda \eta_{t-1}$$

が成立することではなく、各時点では最小化条件(15)が成立するのであつて、制約(16)は平均に於て充されるのである、といわしめている。併し、平均に於て制約が充されるという根拠は何処にあるのだろうか。

更に、現在の推定の手続上次のように考えるべきではあるまいか。

(15)は各時点に於て成立しなければならないわけであるが、 αx_t と $\lambda \eta_{t-1}$ とは α 及 λ の値の如何に拘らず η_t を二部分に分割したもの、即ち、

$$\eta_t = \alpha \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i x_{t-i} = \alpha x_t + \alpha \lambda \sum_{i=1}^{\infty} \lambda^{i-1} x_{t-i} = \alpha x_t + \lambda \eta_{t-1} \text{であるのだから、}$$

$(\eta_t - \alpha x_t - \lambda \eta_{t-1})$ は恒に0でなければならない。すると残差 u_t の間に線型関係

$$-u_{t-1} - \lambda u_t = 0 \quad (t = 1, 2, \dots, T)$$

が恒に成立せねばならないことになり、従つて、攪乱 u_t は時点間に於て独立との仮定に基いて α 及 λ の推定に出發したのに α 及 λ の最尤推定値を求めるための必要条件の中に攪乱 u_t の推定値である残差 u_t の相隣れる時点の間に線型関係が存在せねばならないことが含まれていることになるが、 u_t は定常時系列であるから、 u_t 及 u_{t-1} が独立であり、且つ、 $u_t = \alpha u_{t-1}$ であるためには $E(u_t^2) = 0$ となり、これは問題である。

方法による場合には η_0 を計算過程に於て消去し、 α 及 λ の値のみを求めるように計算を進めるのであるが、そこにいたる迄の η_0 の取扱は一般の単一方程式模型に於ける常数項の取扱に類似している。併し、 η_0 は明らかに推定さるべき α 及 λ を含み、 $\eta_0 = \eta_0(x_0, x_{-1}, \dots, x_{-\infty}; \alpha, \lambda)$ であつて一般の常数項とはその性質を異にしている。従つて、

$$\eta_0 = \alpha \sum_{i=t}^{\infty} \lambda^i x_{t-i} \text{ として } \sum_{t=1}^T (y_t - \alpha \sum_{i=t}^{\infty} \lambda^i x_{t-i})^2 \text{ を } \sum_{t=1}^T (y_t - \alpha \sum_{i=0}^{t-1} \lambda^i x_{t-i} - \lambda^t \eta_0)^2$$

と変換することには何も問題は生じないが、後者を η_0 にて偏微分して(9)を導くには追加条件——その当否は別として——が必要な筈である。それは、 η_0 が推定されるべき α 及 λ に全く無関係で常数項のような性質をそなえていることである。このようにして始めて(9)が得られるのである。若し、 $\lambda^t \eta_0 = \alpha \sum_{i=t}^{\infty} \lambda^i x_{t-i}$ の変換を試みた後に追加条件無しに最尤推定値を求めるには

$$S = \sum_{t=1}^T (y_t - \alpha \sum_{i=0}^{t-1} \lambda^i x_{t-i} - \lambda^t \eta_0)^2 - \sum_{t=1}^T \mu_t (\lambda^t \eta_0 - \alpha \sum_{i=t}^{\infty} \lambda^i x_{t-i})$$

μ_t は Lagrange の乗数

の α 、 λ 及 η_0 についての最小化条件の連立方程式によらなければならない。

追加条件が許容された場合に(9)から求められる α 及 λ の推定値は資料 $(x_T, x_{T-1}, \dots, x_1)$ に基いて推定されるのに、(7)の場合には追加条件はなしに資料 $(x_T, x_{T-1}, \dots, x_1, x_0, x_{-1}, \dots, x_{-\infty})$ によつて推定されるのだから当然両者は異つた推定値になることはいうまでもない。そして、この追加条件の存否が両者のうちの何れかを厳密な意味での「最尤推定値」或は「最小自乗推定値」となす筈であるのに Klein はその点に何も触れていない。

さて、(7)に関しては x_t についての推定に必要な資料が $(x_T, x_{T-1}, \dots, x_1, x_0, x_{-1}, \dots, x_{-\infty})$ であり、更に、 λ^i の指数 i が $(0, 1, \dots, \infty)$ である点から α 及 λ の推定値を求めることは不可能であるのに、(9)に於ては Klein も暗示しているように繁雑さをいとわなければ α 及 λ の推定値を求めることは可能である。但し、その推定値は前述の通り追加条件に制約されるものであることは明らかである。

(10) に就ても同様なことが云える。

次に、Klein の「情報制限」最尤推定法について考察しよう。

彼は二個の総和項 $\sum_{t=1}^T u_t^2 + \sum_{t=1}^T u_{t-1}^2$ に

$y_t = \eta_t + u_t$; $y_{t-1} = \eta_{t-1} + u_{t-1}$; $\eta_t = \alpha x_t + \lambda \eta_{t-1}$ の諸関係を代入して、

$$S = \sum_{t=1}^T (y_t - \alpha x_t - \lambda \eta_{t-1})^2 + \sum_{t=1}^T (y_{t-1} - \eta_{t-1})^2$$

悉くは用いられていない最小化条件でその方程式は現下の模型では二次方程式になる。

Klein は後者を「情報制限」最尤推定法と呼び、これによつて求められた「情報制限」最尤推定値の性質について二つのことを述べているがその一つとして、各時点に於て制約

$$(11) \quad \eta_t = \alpha x_t + \lambda \eta_{t-1}$$

が成立するのではなく、各時点に於ては

$$\lambda(\eta_t - \alpha x_t - \lambda \eta_{t-1}) = -u_{t-1} - \lambda u_t$$

が成立し、そして、平均に於て制約(10)が充されるのである、と主張している。

II

Klein の本文及附録を通じての貢献は Koyck の模型に於て、 u_t が正規分布をし、 $E(u_t u_{t-1}) = 0$ ($i \geq 1$) であり、且つ、 $P(u_0) = P(u_t)$ を仮定する場合には変数誤差模型との類似性に着眼し、その尤度函数を最大化すること、即ち、自乗和

$$\sum_{t=1}^T u_t^2 + \sum_{t=1}^T u_{t-1}^2$$

を最小化すること、は直接的な完全最尤推定法の基いている尤度函数を最大化することに等しいことを明示したこと、又、Koyck の方法によれば α 及 λ の推定値を求めるために二段階の計算手続が必要であるのに Klein の「情報制限」最尤推定法と称するものによればよ・り・簡単な計算手続によつて一挙に等しい結果に到達し得ることを示したことである、といえよう。

併し、附録の記述——本文にも関係を持つが——には色々の問題が含まれているように見受けられるのでそれらの検討から着手しよう。

先づ、(7)と(9)の関係について考察しよう。

(7)は α 及 λ について最小化さるべき自乗和

$$S = \sum_{t=1}^T (y_t - \alpha \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i x_{t-i})^2$$

を推定される Parameter α 及 λ について偏微分して 0 と等置した最小化条件の式である

が、(9)は $\alpha \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i x_{t-1}$ が二つの部分、即ち、

$$\alpha \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i x_{t-1} = \alpha \sum_{i=0}^{t-1} \lambda^i x_{t-1} + \alpha \sum_{i=t}^{\infty} \lambda^i x_{t-1} = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i x_{t-1} + \lambda^t \eta_0$$

に分割されるのを利用して

$$S = \sum_{t=1}^T (y_t - \alpha \sum_{i=0}^{t-1} \lambda^i x_{t-1} - \lambda^t \eta_0)^2$$

とし、Parameter α 及 λ と η_0 について偏微分してこれを 0 と等置したものである。後者の

即ち，観測誤差の理論からの類似性から本文に於て導かれた推定値は (9) に示される意味での最尤推定値ではない。併し，自乗和

$$\sum_{t=1}^T u_t^2 + \sum_{t=1}^T u_{t-1}^2$$

は尤度函数

$$P(u_1, u_0) P(u_2, u_1) \cdots P(u_T, u_{T-1})$$

から導かれ， u_t と u_{t-1} とが独立であると仮定しているので上式は

$$P(u_0) [P(u_1)]^2 [P(u_2)]^2 \cdots [P(u_{T-1})]^2 P(u_T)$$

となり $P(u_0) = P(u_T)$ ならば通常の尤度函数 $P(u_0) P(u_1) \cdots P(u_T)$ の自乗になり変数変換後の α ， λ 及 η_0 に就ての最大化は

$$(10) \quad S = \sum_{t=1}^T \left(y_t - \alpha \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i x_{t-i} - \lambda^t \eta_0 \right)^2$$

の α ， λ 及 η_0 に就ての最小化に等しくなる。

従つて，(9) と (10) とは方程式誤差模型として Parameter の最尤推定値を求めた場合と変数誤差模型として求めた場合，更に最小自乗推定値として求めた場合とが等しい結果になることを示している。

他方，Klein は本文中で最小化方程式 (5) を導く時にすべての制約を充分代入し尽くすことをせず次のようにした。

$$\begin{aligned} \sum_{t=1}^T u_t^2 + \sum_{t=1}^T u_{t-1}^2 &= \sum_{t=1}^T (y_t - \eta_t)^2 + \sum_{t=1}^T (y_{t-1} - \eta_{t-1})^2 \\ &= \sum_{t=1}^T (y_t - \alpha x_t - \lambda \eta_{t-1})^2 + \sum_{t=1}^T (y_{t-1} - \eta_{t-1})^2 \end{aligned}$$

従つて，上式では η_0 以外のあらゆる η_t が充分に消去されていず，それが先記のものと異なることは見られる通りである。

それ故に次のように二つの最小化問題が存在するわけである。それらは，

$$\left\{ \begin{array}{l} \eta_t = \alpha x_t + \lambda \eta_{t-1} \quad (t = 1, 2, \dots, T) \text{ の下での} \\ \sum_{t=1}^T (y_t - \alpha x_t - \lambda \eta_{t-1})^2 + \sum_{t=1}^T (y_{t-1} - \eta_{t-1})^2 = \min \end{array} \right.$$

と

$$\sum_{t=1}^T (y_t - \alpha x_t - \lambda \eta_{t-1})^2 + \sum_{t=1}^T (y_{t-1} - \eta_{t-1})^2 = \min$$

とである。最初のものに就ての最小化条件は Lagrange の乗数を用いての方法によろうと，直接代入法によろうと推定のための方程式は高次の方程式であり，後のそれは制約の

の α 及 λ についての最小化に等しいことを示している。

従つてその最小化条件は

$$(7) \quad \begin{aligned} \sum_{t=1}^T \left(y_t - \alpha \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i x_{t-i} \right) \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i x_{t-i} &= 0 \\ \sum_{t=1}^T \left(y_t - \alpha \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i x_{t-i} \right) \sum_{i=0}^{\infty} i \lambda^{i-1} x_{t-i} &= 0 \end{aligned}$$

であり、これを及 λ に関する連立方程式と見るときこの解は最尤推定値になるわけであるが、この方程式は未知数項の無限和を含んでいるばかりでなく、非常に高次のものになっているので、これを解くことは現実には不可能であろう。

そこで彼は η_t を y_t の「組織的」部分と定義し

$$y_t = \eta_t + u_t$$

とすると、 η_t は

$$\eta_t = \alpha \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i x_{t-i}$$

と定義され、従つて、 η_t は

$$\alpha \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i x_{t-i} = \alpha \sum_{i=0}^{t-1} \lambda^i x_{t-i} + \lambda^t \eta_0$$

と分解されることを利用して、最小化さるべき自乗和を

$$(8) \quad S = \sum_{t=1}^T \left(y_t - \alpha \sum_{i=0}^{t-1} \lambda^i x_{t-i} - \lambda^t \eta_0 \right)^2$$

とする。この自乗和の α 、 λ 及 η_0 についての最小化条件は

$$(9) \quad \begin{aligned} \sum_{t=1}^T \left(y_t - \alpha \sum_{i=0}^{t-1} \lambda^i x_{t-i} - \lambda^t \eta_0 \right) \sum_{i=0}^{t-1} \lambda^i x_{t-i} &= 0 \\ \sum_{t=1}^T \left(y_t - \alpha \sum_{i=0}^{t-1} \lambda^i x_{t-i} - \lambda^t \eta_0 \right) \left(\alpha \sum_{i=0}^{t-1} i \lambda^{i-1} x_{t-i} + t \lambda^{t-1} \eta_0 \right) &= 0 \\ \sum_{t=1}^T \left(y_t - \alpha \sum_{i=0}^{t-1} \lambda^i x_{t-i} - \lambda^t \eta_0 \right) \lambda^t &= 0 \end{aligned}$$

これらの方程式は有限項の和で構成されているが、未知 Parameter に関してなお高次である。併し、繁雑な繰返しの操作をいとわぬならばこれは解けるので最尤推定値を求めることが出来る、と Klein は述べている。

次に、Klein は現下の模型の場合には方程式誤差模型として求められる Parameter の最尤推定値と、(4) の形式に変換した後に、変数誤差模型のようにして求められる Parameter の推定値が一致することを示している。

$$(5) \quad \sum_{t=1}^T y_t x_t - \alpha \sum_{t=1}^T x_t^2 - \lambda \sum_{t=1}^T x_t \eta_{t-1} = 0$$

$$\sum_{t=1}^T y_t \eta_{t-1} - \alpha \sum_{t=1}^T x_t \eta_{t-1} - \lambda \sum_{t=1}^T \eta_{t-1}^2 = 0$$

これらの方程式の中の最初のものに於て η_{t-1} を y_t , x_t , y_{t-1} , α 及 λ で表わし, これを他の二つの方程式に代入し, 更に, その二方程式から α を消去すると次のようになる。

$$(6) \quad \lambda^2 \left(\frac{\sum x_t y_{t-1} \sum x_t y_t}{\sum x_t^2} - \sum y_t y_{t-1} \right) + \lambda \left\{ \sum y_t^2 - \sum y_{t-1}^2 + \frac{(\sum x_t y_{t-1})^2 - (\sum x_t y_t)}{\sum x_t^2} \right\} + \left(\sum y_t y_{t-1} - \frac{\sum x_t y_{t-1} \sum x_t y_t}{\sum x_t^2} \right) = 0$$

λ の推定値はこの方程式の根として得られる。又, α の推定値は次のようにして求められる。

$$\text{est } \alpha = \frac{-\text{est } \lambda \sum x_t y_{t-1} + \sum x_t y_t}{\sum x_t^2}$$

ところで, 先の **Koyck** の方法によつて導かれた (3) に於て α , ℓ 及 $\sum x_t^2$ を観測変数にて表現し, それらを代入し, 更に α を消去すると λ の二次方程式になり (5) と全く一致する。

従つて, **Klein** の方法が **Koyck** の方法よりもすぐれている点は後者の方法によつては二段階の計算手続を経て始めて α 及 λ の推定値が得られるのに, 前者の方法によれば一段階の計算手続きによつて全く同じ結果に到達し得ることであるといえよう。

Klein は計算の簡単化とは別に, この方法によつて求められた推定値は一般的最小自乗推定値或は変数誤差模型的最尤推定値と解し得るが, 更に, 方程式誤差模型としての最尤推定値とも解せられるとし, そのことを示すために末尾に「分配された遅れの最尤推定法」を追補している。

附録の主要な内容は次の通りである。

先づ, **Koyck** の「分配された遅れ」の模型

$$y_t = \alpha \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i x_{t-i} + u_t$$

に於ける Parameter の最尤推定値を導き出すにはこの模型を(2)の形式に変形せず直接求めることが最も自然であるとし, 統計学教科書に見られる通りの尤度函数及その対数を取つたものを示し, その α 及 λ についての最大化が

$$S = \sum_{t=1}^T (y_t - \alpha \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i x_{t-i})^2$$

示している。

(2)を変形して、

$$(4) \quad (y_t - u_t) = \alpha x_t + \lambda(y_{t-1} - u_{t-1})$$

と書き、この外見上の類似から模型を観測誤差を伴う変数によつて構成されている所謂変数誤差模型であるかのように見て **Parameter** の推定の問題を取扱うのである。

さて、先の仮定により、 u_t と u_{t-i} ($i \geq 1$) とは独立であり、更に、誤差と x_t とが独立である限り、観測変数の「真の」値、或は「組織的」部分は古典的模型の場合に要求されるように誤差と独立であることは次の関係から明らかである。

$$E\{u_t (y_t - u_t)\} = E\{u_t \alpha \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i x_{t-i}\}$$

従つて、変数誤差模型に必要な仮定は現下の模型に就ても充されているわけである。

ところで、変数誤差模型に関して荷重回帰推定法によつての **Parameter** の推定値は衆知の通り誤差分散比に依存するが、方程式(4)の場合には、

$$E(u_t^2) = E(u_{t-i}^2)$$

と見られるから分散比は1である。模型に変数が二つしか含まれない場合には分散比が1であることは **Parameter** の推定のための荷重回帰にその特別の場合、即ち、直角回帰であることを意味している。(4)に於ては二つの変数 y_t 及 y_{t-1} は等しい誤差分散を持ち、他のもう一つの変数 x_t は誤差を含まないと仮定されている。従つて、直角回帰そのままではないが、それをわずかに修正すればよいことになる。

u_t が正規分布をすると仮定すれば、(4)からの最尤推定値は今の場合直角回帰推定法により、従つて、「一般的」最小自乗推定法により求めることが出来る。

このことに基いて **Klein** は次式

$$\sum_{t=1}^T u_t^2 + \sum_{t=1}^T u_{t-1}^2 = \min$$

或は

$$y_t = \eta_t + u_t \quad \text{として}$$

$$\sum_{t=1}^T (y_t - \alpha x_t - \lambda \eta_{t-1})^2 + \sum_{t=1}^T (y_{t-1} - \eta_{t-1})^2 = \min$$

の最小化を観測変数の「組織的」部分である η_t と α 及 λ についてなすのであるが、その最小化条件式は η_t , α 及 λ に就ての次の連立方程式として表わされ、その解は最尤推定値であるとする。

$$y_{t-1} - \eta_{t-1} + \lambda y_t - \alpha \lambda x_t - \lambda^2 \eta_{t-1} = 0$$

示し、その **Parameter** の推定値を求めようと試みた。

$$(1) \quad y_t = \alpha \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i x_{t-i} + u_t \quad (0 \leq \lambda < 1)$$

この模型は先の模型に非常に似ていて一見したところでは先述の三難点のうちの最初の二つに上げられた困難さを少しも軽減しているようには見えない。併し、この模型は次のような操作が施されることによつて、わずか三個の観測変数を含む等値の関係式に変換されるという利点がある。

$$y_t = \alpha x_t + \alpha \lambda x_{t-1} + \alpha \lambda^2 x_{t-2} + \cdots + u_t$$

一時点ずらし、両辺に λ を掛けると、

$$\lambda y_{t-1} = \alpha \lambda x_{t-1} + \alpha \lambda^2 x_{t-2} + \cdots + \lambda u_{t-1}$$

両式から

$$(2) \quad y_t = \alpha x_t + \lambda y_{t-1} + u_t - \lambda u_{t-1}$$

(2)には従属変数として y_t ，独立変数として x_t ， y_{t-1} ，攪乱項として $u_t - \lambda u_{t-1}$ が含まれている。ここで、このままの形式では最尤推定法の利用は不可能であり、最小自乗法の使用もはばまれる。というのは、 y_t と y_{t-1} は確率変数になつて居り、又、 y_{t-1} と u_{t-1} とは独立ではなく、更に、 $(u_t - \lambda u_{t-1})$ と $(u_{t-1} - \lambda u_{t-2})$ とはたとえ u_t と u_{t-1} とが独立であつても、——以後 u_t と u_{t-i} ($i \geq 1$) が独立の場合のみを考察する——独立ではなく、分散行列も得られないからである。若し、強いて y_t の y_{t-1} 及 x_t への通常の最小自乗推定法を使用すれば、大標本に就ては **Koyck** が、小標本に就ては **Hurwiz** が指摘している通り、偏りのある推定値しか求めることが出来ない。

そこで **Koyck** は α 及 λ の一致推定値を求めることを目標に置き、次のような手続きをとる。先づ、攪乱が独立変数と独立である場合の y_t の x_t 及 y_{t-1} への回帰から α 及 λ の通常の最小自乗推定値を求め、それらを a 及 ℓ とし、残差 z_t の自乗和

$$\sum_{t=1}^T z_t^2 = \sum_{t=1}^T (y_t - a x_t - \ell y_{t-1})^2$$

を計算する。

次に、 α 及 λ の一致推定値は連立方程式

$$(3) \quad \begin{aligned} \bar{\alpha} \sum x_t^2 + \bar{\lambda} \sum x_t y_t &= \sum x_t y_t \\ \bar{\alpha} \sum x_t y_{t-1} + \bar{\lambda} \sum y_{t-1}^2 &= \sum y_t y_{t-1} + \frac{\bar{\lambda} \sum z_t^2}{1 + \ell \bar{\lambda}} \end{aligned}$$

を $\bar{\alpha}$ 及 $\bar{\lambda}$ について解くことによつて α 及 λ の一致推定値を求めるのである。

上述の **Koyck** の方法に対して **Klein** は以下に述べるように異つた観点から模型を見て、その立場に基いて α 及 λ の推定値を求め、それらが **Koyck** の推定値を一致することを

分配された遅れの推定

釜 場 一 郎

The Estimation of Distributed Lags

Ichiro UKEBA

Koyck は投資行動及びそれに類似した問題の研究のために特殊な「遅れ」の型の模型を設定し、その Parameter の推定法を考察した。この Koyck の推定法に関心を持った Klein は Koyck が導いた模型を変形し、異つた観点から模型を見てその Parameter を推定する方法を考察した。その方法によると Koyck の計算手続によるよりも簡単に、等しい推定値に到達し得ること、及び、Koyck がその推定値を一致推定値としたのに対して、それが最尤推定値にもなることを *Econometrica* No.26 に於て展開した。

併し、そこには色々の問題が含まれているように思えるので、本稿に於ては先づ両者の推定法の要点を述べ、次に、Klein の推定法に対する私見を、最後に、最尤推定値を求める一つの方法を展開したい。

I

Koyck は「分配された遅れ」の一般的形式として次の模型を提示する。

$$y_t = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i x_{t-i} + u_t$$

この模型に含まれている x_{t-i} 及 y_t は観測変数、 u_t は攪乱（方程式誤差）である。ところで、この方程式のそのままの形式に於ては次のような三つの難点が含まれている。先づ、右辺が無限項和となつていたので、これを有限項和に変換しないと Parameter の推定値を求めることは可能でないこと。次に、独立変数 x_{t-i} と x_{t-j} とが独立とは考えられないので多重共線性の問題が懸念されること。尤も、Parameter の和とか、或る種の函数を求めることが目的である場合にはたとえ多重共線性の問題が生じても十分な精度の推定値を求めることが可能なこともあるが、併し、個々の Parameter の推定値を求める事を目的とする場合には推定値の信頼度が非常に低くなる。最後に、個々の Parameter が α_i の形式、即ち、何等の制約も課せられないままで非常に一般的に表現されていることである。これは Parameter の推定値を求めることを困難にする。

以上のような理由から Koyck は一般的形式を見送り、次のような制約された形式を提