

非線形減衰をもつ非調和系のカオス およびリミット・サイクル的挙動

Chaotic Behavior and Limit Cycle Behavior of Anharmonic Systems with Nonlinear Damping

田 中 稔 次 朗

Toshijiro TANAKA

(Received September 16, 1986)

The chaotic behavior and limit cycle behavior of anharmonic systems with nonlinear damping are investigated. The dynamical equation was numerically solved for the phase portraits and the temporal evolution of x as a function of the amplitude of the external periodic field. It is also shown that the chaos-chaos transition occurs in our systems.

§ 1 はじめに

カオスの研究における最近の著しい発展は、Ruelle-Takens¹⁾が乱流発生についてのLandau-Hopfの描像を修正し、分岐理論に基づく新しい機構を提案したことと、Feigenbaum²⁾がカオス発生の近傍における普遍則を、繰り込み群の理論を用いて展開したことに始まったといえよう。Feigenbaumの普遍則は、最も基本的なロジスティック模型のみならず、一次元写像関数の頂点近傍が2次曲線であるようなひと山写像ならば、系によらずに成立する。これらの理論が契機となって、流体乱流、化学反応系や非線形電気回路など散逸系におけるカオス発生の実験的研究がなされ、種々の系でのカオス現象が明らかになった。

さて、これまで研究された散逸力学系は、減衰過程が速度に比例する線形減衰の場合であり、速度に関して非線形な減衰項をもつ系については、まだ研究されていない。この論文の目的は、非線形減衰をもつ非調和系の周期運動からカオス発生に致る道筋とカオス的挙動を考察することである。次節以下では、非線形減衰系を記述するモデルと計算機実験について述べる。

§ 2 非線形減衰をもつ非調和力学系

周期外力の下で、非調和ポテンシャル内を非線形抵抗を受けて運動する粒子の周期的およびカオス的挙動について調べる。考察する力学系は、次の微分方程式によって記述される。

$$\ddot{x} + \alpha |\dot{x}| \dot{x} + \frac{dV(x)}{dx} = f \cos \omega t \quad (1)$$

ただし、 x は時刻 t における粒子の位置を表わし、 α は減衰係数で正の定数である。ここで $V(x)$ は非調和ポテンシャルで次のように与えられる。

$$V(x) = -\frac{\beta}{2} x^2 + \frac{\gamma}{4} x^4 \quad (2)$$

ただし、 β と γ は定数である。さて、式(1)の右辺は周期外力を表わし、 f および ω はそれぞれ周期外力の振幅と振動数である。左辺の第2項は、速度の2乗に比例した非線形減衰項を表わし、速度 \dot{x} が大きい場合に系の散逸に大きく寄与する。さて、式(2)からわかるように、非調和ポテンシャルは $x = \pm \sqrt{\frac{\beta}{\gamma}}$ で最小値をとるので、粒子はダブルミニマム・ポテンシャル中を運動することになる。さて、式(2)を(1)に代入すると次のようになる。

$$\ddot{x} + \alpha |\dot{x}| \dot{x} - \beta x + \gamma x^3 = f \cos \omega t \quad (3)$$

上式はDuffing型に似た非線形常微分方程式であり、一般的には解析的に解くことはできない。すなわち、我々が考察する力学系は非可積分系である。そこで式(3)の解を数値的に求めるためには、この式を一階の微分方程式に直し、時間を陽に含まない自律系として取り扱うのが便利であり、次のように表わす。

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -\alpha |y| y + \beta x - \gamma x^3 + f \cos z \\ \dot{z} &= \omega \end{aligned} \quad (4)$$

ただし、 $z(t=0) = 0$ である。この式は、 $x \rightarrow x$, $y \rightarrow y$, $z \rightarrow z + 2\pi$ の変換に対して不変である。式(4)の第2式で、 $\beta = 0$ そして $-\alpha |y| y$ を $-\alpha y$ と置いたものは、Duffing方程式³⁾と呼ばれ、非線形インダクタンスを含む直列共振回路を記述する方程式である。上述の線形減衰の場合、その系のリミット・サイクルやカオスの挙動が、これまでに詳しく調べられ、カオスに致る道筋が明らかにされている。⁴⁾

この論文では、先に述べたように、式(4)で記述される非線形減衰系の周期運動からカオスに致る道筋とそのカオスの挙動について考察する。我々は特に、粒子の運動に対する非線形減衰の効果について興味がある。まず微分方程式を数値的に解く前に、その解の特徴を定性的に調べてみる。式(2)で表わされる非調和ポテンシャル中の粒子の運動は、ポテンシャルの形、すなわち β と γ の符号に大きく依存する。

$\beta \leq 0, \gamma > 0$ の場合は、 $|x| \rightarrow \infty$ のとき、 $V(x) \rightarrow \infty$ となるので、明らかに全体的に束縛された解が存在する。この場合のポテンシャルは、ただ一つの極小値をもつ。このポテンシャル内での線形減衰 $-\alpha y$ をもつ粒子の舞いは、Hayashi⁵⁾とUeda⁶⁾によって詳しく調べられ、カオス状態の存在が示

された。また $\beta < 0$ で $\gamma > 0$ の場合は、 $|x| \rightarrow \infty$ のとき、 $V(x) \rightarrow -\infty$ となるので、 x の初期値を十分大きくとると式(4)の解は発散することがわかる。そこで我々は、話を $\beta > 0$ および $\gamma > 0$ の場合のポテンシャル $V(x)$ で記述される力学系の問題に限りたい。線形減衰の場合には、Steeb⁷⁾によって系のリミット・サイクルおよびカオス状態が詳しく調べられた。この非調和ポテンシャルでは、図1に示されるように二つの谷を持つので、一つの谷での周期運動からカオス状態への遷移と、一つの谷の中でのカオス状態から二つの谷をめぐるカオス状態への転移、いわゆるカオス—カオス転移が予想されて興味深い。線形減衰をもつダブルミニマム・ポテンシャル系でのカオス—カオス転移は、Ishii⁸⁾達によって研究されている。

§ 3 計算機実験と議論

ここでは微分方程式(4)をルンゲ・クッタ法により数値的に解くことによって、系の相空間での振舞いを調べる。特に (x, y) 面での位相図を描き、さらに軌道の時間的変化およびPoincaré写像をプロットすることによって、リミット・サイクルからストレンジ・アトラクタ、すなわち周期運動からカオスに致る道筋を明らかにする。系の挙動がカオス的かどうかは、ストレンジ・アトラクタの存在だけでなく、自己相関関数の減衰やPoincaré写像から判断するので、リアプノフ指数は計算しない。

我々の数値実験では、パラメータの値を $\alpha=1, \beta=10, \gamma=100, \omega=3.5$ と置き、周期外力の振幅 f を制御パラメータとして変化させる。我々は、ルンゲ・クッタ法による時間の刻みを $\Delta t = \frac{2\pi}{\omega}/150$ にとり、制御パラメータ f を $0.5 \leq f \leq 1.0$ の範囲で変化させ、系の軌道を計算した。このとき時刻 $t=0$ における粒子の位置が非調和ポテンシャルの正の位置に、そして速度を正の値として初期

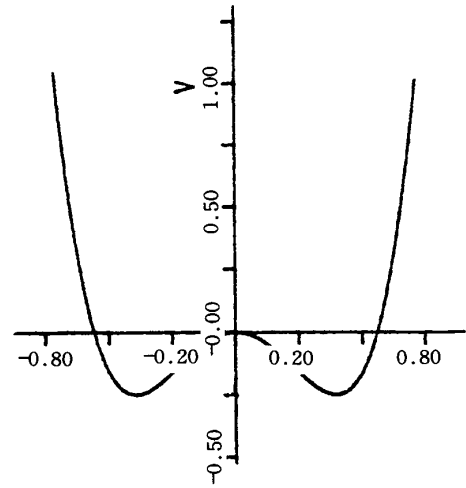


図1 非調和ポテンシャル

$$V(x) = -5x^2 + 25x^4$$

条件を設定した。なお、系の過渡的な振舞いはカットしてあるので計算結果には含まれていない。さて、 $f=0.505$ の場合、系の相空間での振舞いは単純な一巻の軌道、リミット・サイクルになっている。この状態から f の値を少しずつ増化させると、 f のある値 f_1 で、リミット・サイクルが不安定になり、突然分岐して2重巻きのリミット・サイクルへ遷移する。これらを図2に示す。 x の時間変化から周期倍化の様子が見える。この状態から f を増加させると、図3に示すように軌道は f_2 で4重巻き、 f_3 で8重巻き……というように一般に 2^n 分岐と呼ばれる分岐現象が現われる。我々の数値実験では、相空間での軌道が $y=0$ の面を通過するときの x の値をデジタル表示して軌道の分岐を調べたが、数値計算による誤差もあって分岐の起こる f_n の値は最初の4つ f_1, f_2, f_3, f_4 しか求めることができなかった。勿論、これらの値も近似的なものである。さらに、 $f_\infty \approx 0.58$ でポテンシャルの一つの谷に制限されたカオスが発生する。

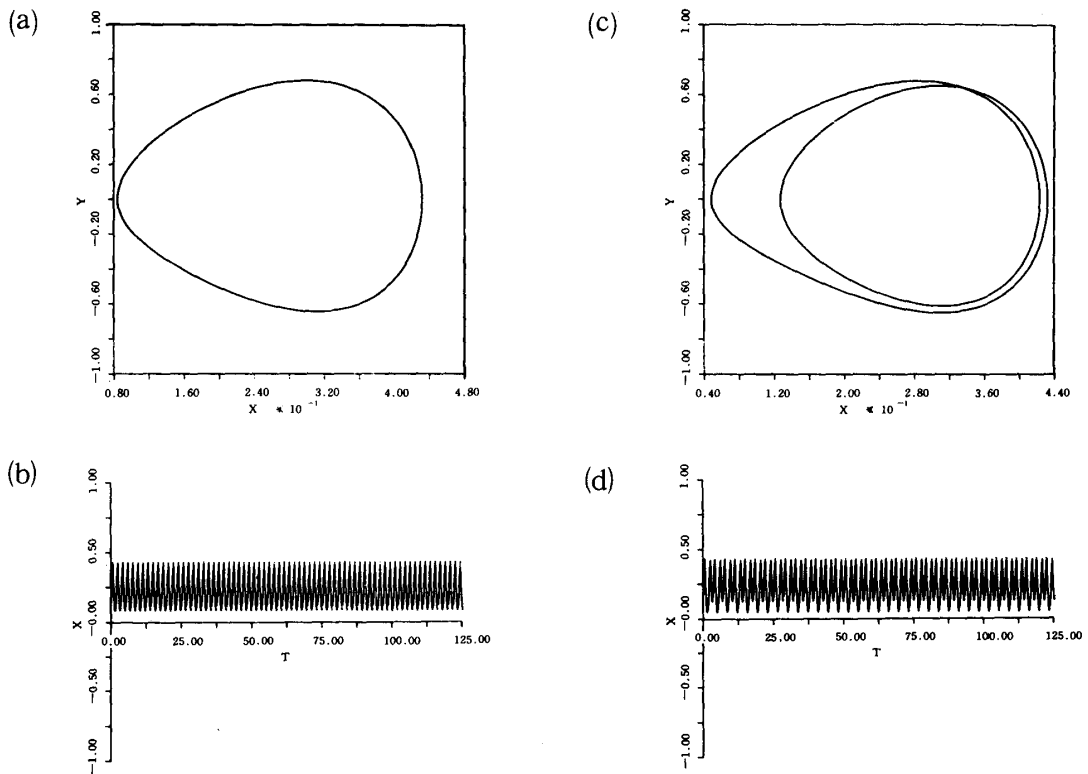


図2 (a) (4)式の解の位相図(x, y)、ただし、 $\alpha=1, \beta=10, \gamma=100, \omega=3.5$ で $f=0.505$
 (b) x の時間変化、(c), (d)は $f=0.557$ の場合で、軌道が2重巻に分岐しているのがわかる。

系の位相図、 x の時間変化およびPoincaré写像を図4に示す。図4(b)からわかるように、このカオス状態では粒子の運動は x の正の側に限られ、原点に対して非対称なので非対称カオスと呼ばれる。分岐理論では、系の周期が2倍になる遷移が f を増加させていくにつれて相次で起り、

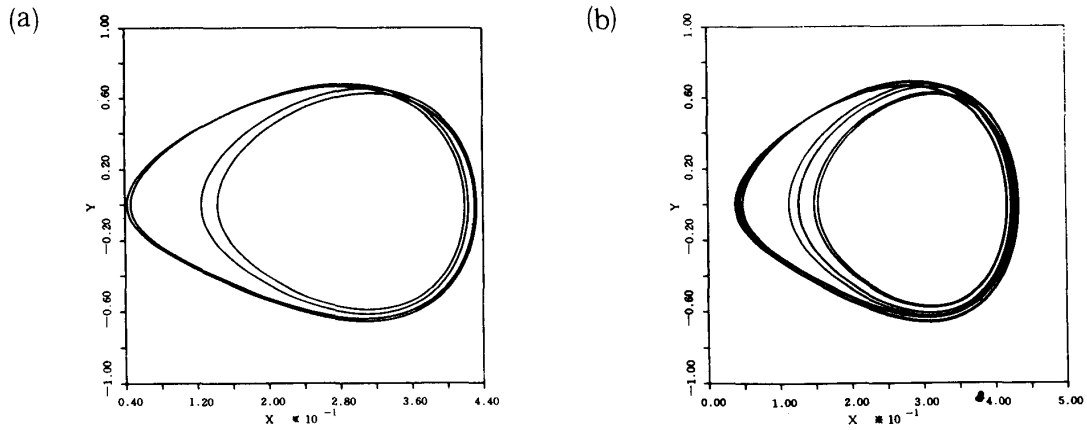


図3 (a) $f=0.57$ のときの位相図, 周期が4倍になっている。(b) $f=0.578$ で周期16の場合。

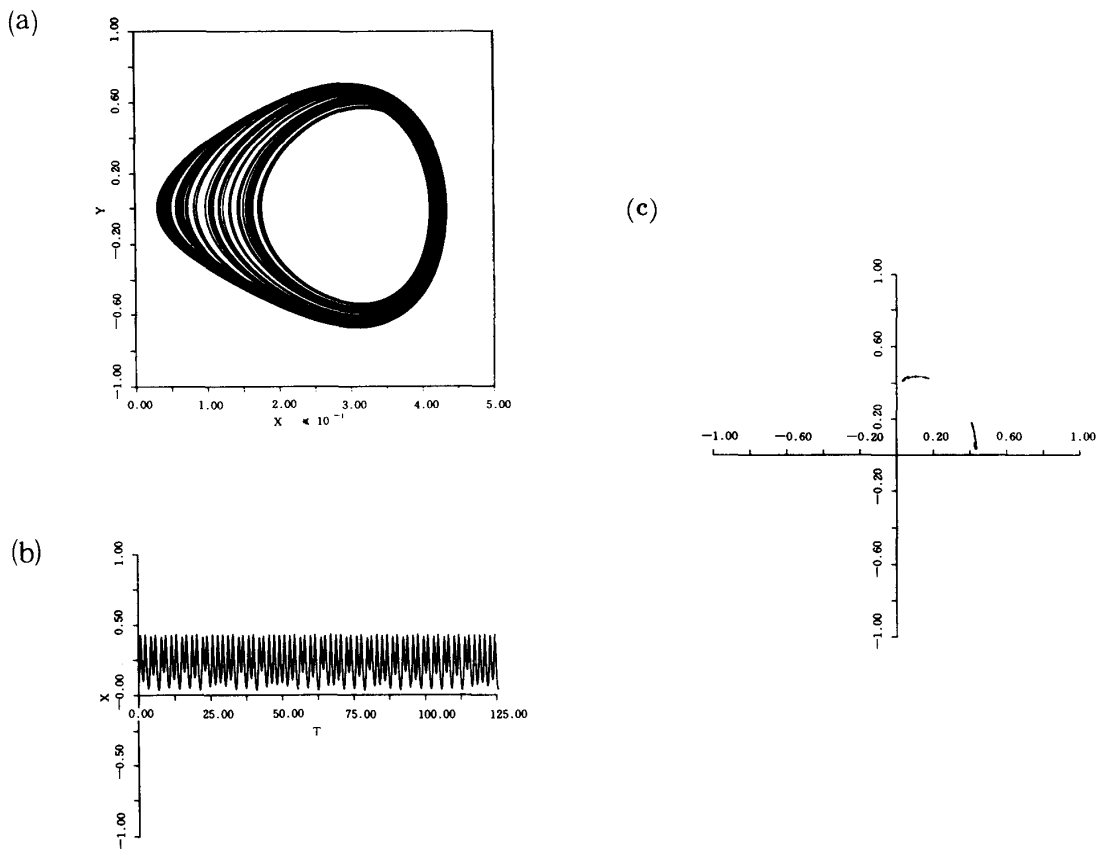


図4 $f=0.5918$ のカオス状態, (a) 位相図, (b) x の時間変化, (c) Poincaré断面 $y=0$ から得られた (x_n, x_{n+1}) プロット。

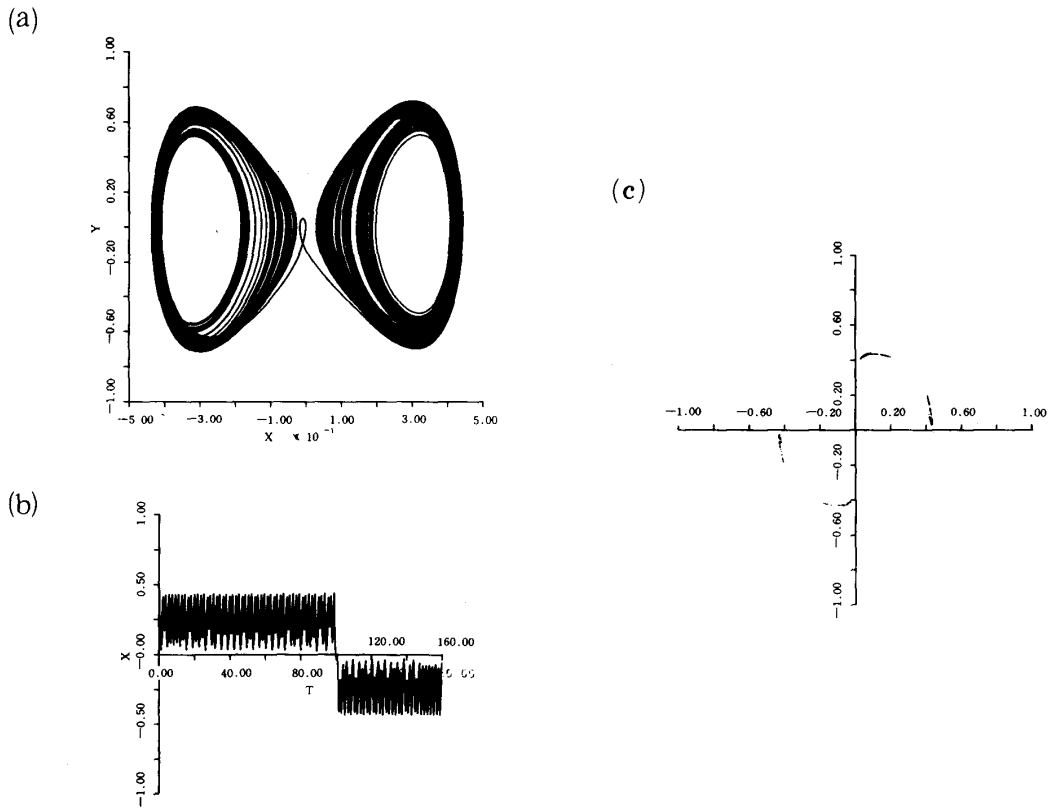


図5 $f=0.592$ で非対称カオスから対称カオスへ転移した直後, (a) 位相図, (b) x の時間変化, (c) (x_n, x_{n+1}) プロット。

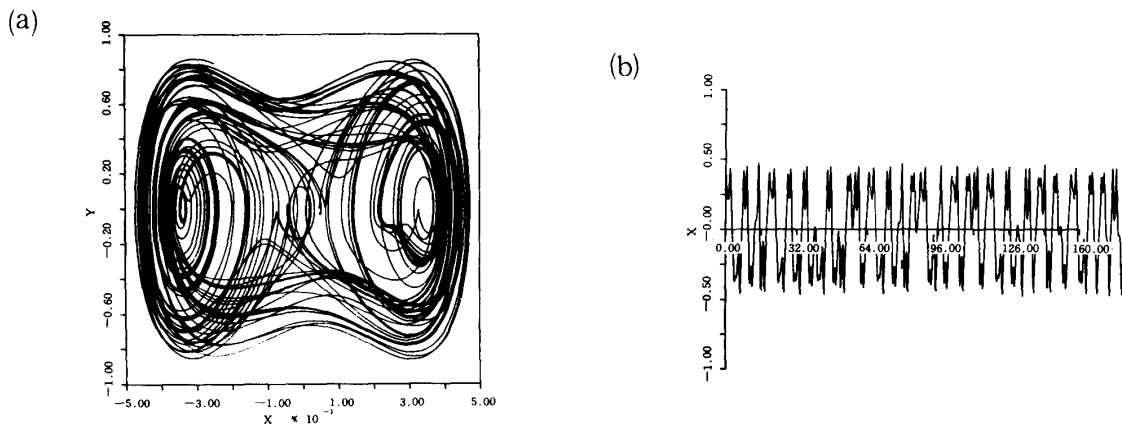


図6 $f=1.0$ のとき対称カオス, 位相図 (a) と x の時間変化 (b)

しかも遷移を起る f_n の間隔が次第に狭くなって遂には f_∞ に集積し, そこでカオスが発生するというのである。この周期倍化からカオスに致る道筋は, 我々の系においても線形減衰系と同様に成立っていることがわかった。我々は系の大域的性質を調べるために, Poincaré写像も計算した。軌道

が $y = 0$ の Poincaré 断面を通過するときの x の値に番号を付け、その系列を $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$ とすると、近似的な一次元写像

$$x_{n+1} = F(x_n) \quad (5)$$

が得られる。ただし、 $F(x)$ は写像関数である。それを (x_n, x_{n+1}) にプロットしたのが図4(c)である。さらに、振幅 f が臨界値 $f_c \approx 0.592$ を越えると、粒子は突然ポテンシャルの二つの谷の間を飛び移るというカオス状態を示す。すなわち粒子はポテンシャルの一つの谷でカオス的運動をししばらくした後、反対側の谷へ飛び移り、そこでまたカオス的運動を行い、また元の谷へ移るということを繰り返す。図5からわかるように、カオス的挙動を表わすストレンジ・アトラクタは対称性がよく美しい形をしている。したがって、この f_c を、非対称カオスから対称カオスへ転移する転移点とみなすことができる。 $f > f_c$ では図6に示されるように、粒子がポテンシャルの二つの谷を一樣に徘徊するカオス状態が出現する。勿論、これらのカオス状態では自己相関関数は時間と共に減衰する。

§ 4 結 論

非調和ポテンシャル内を周期外力と非線形抵抗を受けて運動する一粒子のリミット・サイクルおよびカオス的挙動を調べた。制御パラメータを変化させ、系の位相図、位置の時間変化および Poincaré 写像を計算した。その結果、非線形減衰の系でも、線形減衰の系と同様に周期倍化による分岐現象を示し、 f_c でカオス状態に転移することと、 f_c でカオス→カオス転移が起こることがわかった。なお、我々の系で、 2° 分岐にともなう Feigenbaum の普遍則²⁾ が成立しているかどうかは、数値実験による誤差の問題があって結論を得るまでには致らなかった。

最後に、この研究についての大型計算機利用など有益な御助言を頂いた鹿児島大学工学部電気工学科の広岡繁先生と数値実験を手伝って頂いた助手の倉元三七子氏に深く感謝致します。

参 考 文 献

- 1) D. Ruelle and F. Takens, *Comm. Math. Phys.* **20** (1971) 167.
- 2) M. J. Feigenbaum, *J. Stat. Phys.* **19** (1978) 25.
- 3) S. Sato, M. Sano and Y. Sawada, *Phys. Rev. A* **28** (1983) 1654.
- 4) B. A. Huberman and J. P. Crutchfield, *Phys. Rev. Letts.* **43** (1979) 1743.
- 5) C. Hayashi, *Int. J. Non-Linear Mech.* **15** (1980) 341.
- 6) Y. Ueda, *Ann. N. Y. Acad. Sci.* **357** (1980) 422.
- 7) W.-H. Steeb, W. Erig and A. Kunick, *Phys. Letts.* **93A** (1983) 267.
- 8) H. Ishii, H. Fujisaka and M. Inoue, *Phys. Letts.* **116 A** (1986) 257.